コンパクトHausdorff空間における位相の強弱と性質の保存について

> 位相空間論における重要なテーマとして、「コンパクトHausdorff空間の位相を強めたり、弱めたりした場合に、その空間の性質がどのように変化するか」という問題があります。この記事では、この疑問に対して厳密かつ丁寧に解説します。
>
> 結論から申し上げますと、コンパクトHausdorff空間の位相は、Hausdorff性を保ったままこれ以上弱くできず、コンパクト性を保ったままこれ以上強くできないという「絶妙なバランス」の上に成り立っています。したがって、元の位相から真に強い位相を入れても、真に弱い位相を入れても、コンパクトHausdorff空間のままであることはあり得ません。
>
> この事実を完全に理解できるよう、自己完結的な構成で基本概念の定義から出発し、証明と具体例を詳述します。

1. 基本概念の定義

数学的な議論を厳密に進めるため、まずは必要となる基本概念を定義する。

定義 1.1 (位相と開集合・閉集合).
集合 X 上の位相 (topology) とは、X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ であり、以下の公理を満たすものである。

- $\varnothing \in \mathcal{O}$ かつ $X \in \mathcal{O}$ である。
- $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ ならば $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ である。
- 任意の添字集合 Λ に対して、各 $\lambda \in \Lambda$ で $U_\lambda \in \mathcal{O}$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ である。

$\mathcal{O}$ の元を X の開集合 (open set) と呼ぶ。また、X の部分集合 F が閉集合 (closed set) であるとは、その補集合 $X \setminus F$ が開集合であることを言う。

定義 1.2 (位相の強弱).
集合 X 上の2つの位相 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ に対して、$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ が成り立つとき、$\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より強い (finer)、あるいは $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より弱い (coarser) と言う。さらに $\mathcal{O}_1 \neq \mathcal{O}_2$ であるとき、$\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より真に強い、$\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より真に弱いと言う。

定義 1.3 (Hausdorff空間).
位相空間 X がHausdorff空間 (Hausdorff space) であるとは、任意の異なる2点 $x, y \in X$ ($x \neq y$) に対して、$x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \varnothing$ を満たす開集合 U, V が存在することを言う。

定義 1.4 (コンパクト空間と相対位相).
位相空間 X の開被覆 (open cover) とは、X の開集合からなる族 $\mathcal{U}$ であり、$X = \bigcup \mathcal{U}$ を満たすものを言う。位相空間 X がコンパクト (compact) であるとは、X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、有限個の元 $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ が存在して $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ とできることを言う。この有限個の開集合による被覆を有限部分被覆 (finite subcover) と呼ぶ。

また、X の部分集合 A に対して、相対位相 (relative topology) を $\mathcal{O}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$ によって定める。部分集合 A がコンパクトであるとは、A に相対位相を入れた部分空間 (subspace) がコンパクト空間であることを言う。

定義 1.5 (連続写像と同相写像).
位相空間 X から Y への写像 $f: X \to Y$ が連続 (continuous) であるとは、Y の任意の開集合 V に対して、その逆像 $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ が X の開集合になることを言う。
また、f が全単射であり、f もその逆写像 f^{-1} もともに連続であるとき、f を同相写像 (homeomorphism) と言う。同相写像が存在するとき、二つの空間は位相的に同型であるとみなす。

2. 準備となる補題とその証明

主定理を証明するための鍵となる「コンパクト空間からHausdorff空間への連続全単射は同相写像である」という基本定理を導くため、3つの標準的な補題を丁寧に証明する。

> **補題 A.**
> コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである。

証明：
X をコンパクト空間、$F \subset X$ を閉集合とする。F に相対位相を与えた空間がコンパクトであることを示すため、F の任意の開被覆を $\mathcal{V}$ とする。
相対位相の定義より、各 $V \in \mathcal{V}$ はある X の開集合 U_V を用いて $V = U_V \cap F$ と書ける。このとき、族 $\mathcal{U} = \{U_V \mid V \in \mathcal{V}\}$ は $F \subset \bigcup \mathcal{U}$ を満たす。
F は閉集合であるから、その補集合 $X \setminus F$ は X の開集合である。したがって、$\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ は X の開集合からなる族であり、全体として X を被覆する開被覆となる。
X はコンパクトであるから、この開被覆は有限部分被覆を持つ。すなわち、有限個の $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ が存在して、$X \subset U_{V_1} \cup \cdots \cup U_{V_n} \cup (X \setminus F)$ となる。
この両辺と F の共通部分をとると、$F \cap (X \setminus F) = \varnothing$ であるため、$F \subset (U_{V_1} \cap F) \cup \cdots \cup (U_{V_n} \cap F) = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ を得る。
これは $\mathcal{V}$ の有限部分被覆であるため、F はコンパクトである。

(Q.E.D.)

> **補題 B.**
> Hausdorff空間のコンパクト部分集合は閉集合である。

証明：
X をHausdorff空間、$K \subset X$ をコンパクト部分集合とする。K が閉集合であることを示すには、補集合 $X \setminus K$ が開集合であること、すなわち任意の $x \in X \setminus K$ に対して $x \in U \subset X \setminus K$ を満たす開集合 U が存在することを示せばよい。
点 $x \in X \setminus K$ を任意に固定する。各 $y \in K$ に対して $x \neq y$ である。X はHausdorff空間であるから、$x \in U_y$、$y \in V_y$、$U_y \cap V_y = \varnothing$ を満たす開集合 U_y, V_y が存在する。
このとき、族 $\{V_y \cap K \mid y \in K\}$ は K の相対位相における開被覆である。K はコンパクトであるから、有限個の点 $y_1, \ldots, y_m \in K$ が存在して、$K \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$ とできる。
ここで、$U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_m}$ および $V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$ と置く。U は有限個の開集合の共通部分なので開集合であり、V も開集合の和なので開集合である。
各 i について $x \in U_{y_i}$ であるから $x \in U$ である。また $K \subset V$ である。
さらに、各 i について $U_{y_i} \cap V_{y_i} = \varnothing$ であるため、$U \subset U_{y_i}$ より $U \cap V_{y_i} = \varnothing$ となる。したがって $U \cap V = \varnothing$ である。
$K \subset V$ であることから $U \cap K = \varnothing$ であり、これは $U \subset X \setminus K$ を意味する。
よって、$X \setminus K$ は開集合となり、K は閉集合である。

(Q.E.D.)

> **補題 C.**
> 連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクトである。

証明：
$f : X \to Y$ を連続写像とし、$K \subset X$ をコンパクト部分集合とする。像 $f(K)$ が Y の部分空間としてコンパクトであることを示す。
$\mathcal{V}$ を $f(K)$ の相対位相における開被覆とする。各 $V \in \mathcal{V}$ は、Y のある開集合 W_V を用いて $V = W_V \cap f(K)$ と表せる。
f は連続であるから、各 W_V の逆像 $f^{-1}(W_V)$ は X の開集合である。したがって、族 $\{f^{-1}(W_V) \cap K \mid V \in \mathcal{V}\}$ は K の相対位相における開被覆となる（任意の $x \in K$ に対し $f(x) \in f(K) \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} W_V$ であるため）。
K はコンパクトであるから、有限個の $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{V}$ が存在して、$K \subset f^{-1}(W_{V_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(W_{V_k})$ と被覆できる。
両辺の f による像をとると、$f(K) \subset W_{V_1} \cup \cdots \cup W_{V_k}$ となる。これと $f(K)$ の共通部分をとれば、$f(K) \subset V_1 \cup \cdots \cup V_k$ が得られる。
したがって、$f(K)$ はコンパクトである。

(Q.E.D.)

> **補題 D (コンパクトHausdorff空間に関する基本定理).**
> X をコンパクト空間、Y をHausdorff空間とする。このとき、連続全単射 $f : X \to Y$ は同相写像である。

証明：
f が全単射であるから、逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が一意に存在する。f が同相写像であることを示すには、f^{-1} が連続であることを示せばよい。
一般に、写像が連続であることは、「任意の閉集合の逆像が閉集合であること」と同値である。したがって、X の任意の閉集合 F に対して、$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ が Y の閉集合であることを示せば十分である。

F を X の任意の閉集合とする。補題 A より、X がコンパクトであるため F もコンパクトである。
f は連続写像であるから、補題 C より、その像 $f(F)$ は Y のコンパクト部分集合となる。
Y はHausdorff空間であるから、補題 B より、Y のコンパクト部分集合 $f(F)$ は閉集合である。
以上より、f^{-1} は閉集合を閉集合に引き戻すため連続であり、f は同相写像である。

(Q.E.D.)

3. 各問いへの解答と証明

これまでに準備した補題 D を用いて、元の問いに対する厳密な解答を与える。

> **定理 1 (真に強い位相を入れた場合).**
> X をコンパクトHausdorff空間とする。X に元の位相よりも真に強い位相を入れてできる位相空間 X_s は、コンパクトHausdorffのままであり得ない。

証明：
X の元の位相を $\mathcal{O}$ とし、X_s の位相を $\mathcal{O}_s$ とする。仮定より $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_s$ かつ $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}_s$ である。
もし、$X_s = (X, \mathcal{O}_s)$ がコンパクトHausdorff空間のままであり得ると仮定して矛盾を導く。
恒等写像 $\mathrm{id} : X_s \to X$ （すなわち $\mathrm{id}(x) = x$）を考える。
$\mathcal{O}$ の任意の開集合 U に対して、その逆像は $\mathrm{id}^{-1}(U) = U$ である。$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_s$ であるから $U \in \mathcal{O}_s$ となり、$\mathrm{id}^{-1}(U)$ は X_s の開集合である。よって $\mathrm{id} : X_s \to X$ は連続写像である。また、明らかに全単射である。
仮定より、始域 X_s はコンパクト空間であり、終域 $X = (X, \mathcal{O})$ はHausdorff空間である。したがって、補題 D により、連続全単射 id は同相写像となる。
同相写像は開写像 (open map) でもあるため、始域の任意の開集合 $V \in \mathcal{O}_s$ の像 $\mathrm{id}(V) = V$ は終域の開集合、すなわち $V \in \mathcal{O}$ となる。
これは $\mathcal{O}_s \subset \mathcal{O}$ を意味する。すでに $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_s$ であるから $\mathcal{O} = \mathcal{O}_s$ が導かれるが、これは $\mathcal{O}_s$ が $\mathcal{O}$ より真に強い（$\mathcal{O} \neq \mathcal{O}_s$）という仮定に矛盾する。
したがって、X_s がコンパクトHausdorff空間であるという仮定は誤りであり、X_s はコンパクトHausdorffのままであり得ない。

(Q.E.D.)

> **定理 2 (真に弱い位相を入れた場合).**
> X をコンパクトHausdorff空間とする。X に元の位相よりも真に弱い位相を入れてできる位相空間 X_w は、コンパクトHausdorffのままであり得ない。

証明：
X の元の位相を $\mathcal{O}$ とし、X_w の位相を $\mathcal{O}_w$ とする。仮定より $\mathcal{O}_w \subset \mathcal{O}$ かつ $\mathcal{O}_w \neq \mathcal{O}$ である。
もし、$X_w = (X, \mathcal{O}_w)$ がコンパクトHausdorff空間のままであり得ると仮定して矛盾を導く。
恒等写像 $\mathrm{id} : X \to X_w$ を考える。
$\mathcal{O}_w$ の任意の開集合 V に対して、$\mathrm{id}^{-1}(V) = V$ である。$\mathcal{O}_w \subset \mathcal{O}$ であるから $V \in \mathcal{O}$ となり、$\mathrm{id}^{-1}(V)$ は X の開集合である。
よって $\mathrm{id} : X \to X_w$ は連続写像であり、明らかに全単射である。
元の空間 $X = (X, \mathcal{O})$ はコンパクト空間であり、仮定より終域 X_w はHausdorff空間である。したがって、補題 D により、連続全単射 id は同相写像となる。
同相写像であることから、逆写像 $\mathrm{id}^{-1} : X_w \to X$ も連続である。すなわち、$\mathcal{O}$ の任意の開集合 U の逆像 $(\mathrm{id}^{-1})^{-1}(U) = U$ は $\mathcal{O}_w$ の開集合となる。
これは $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_w$ を意味する。すでに $\mathcal{O}_w \subset \mathcal{O}$ であるから $\mathcal{O} = \mathcal{O}_w$ となるが、これは $\mathcal{O}_w$ が $\mathcal{O}$ より真に弱い（$\mathcal{O}_w \neq \mathcal{O}$）という仮定に矛盾する。
したがって、X_w はコンパクトHausdorffのままであり得ない。

(Q.E.D.)

4. 理解を深めるための具体例

位相を「強くする」「弱くする」ことで、コンパクトHausdorff空間の性質が具体的にどのように崩れるかを、実数の単位閉区間を例に確認する。

> **例 1 (真に強い位相を入れてコンパクト性が失われる例).**
> 実数の単位閉区間 $I = [0, 1]$ に、通常の距離から定まる位相 $\mathcal{O}$ を入れる。空間 $(I, \mathcal{O})$ はハイネ・ボレルの定理よりコンパクトであり、またHausdorff空間である。
> ここで、I に離散位相 (discrete topology) $\mathcal{O}_s$ を入れる。離散位相とは、I の全ての部分集合が開集合となる位相である。
> 通常の開集合も当然 $\mathcal{O}_s$ に含まれるため $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_s$ であり、単元集合 $\{0\}$ のように $\mathcal{O}$ には含まれないが $\mathcal{O}_s$ には含まれる集

合が存在するため、$\mathcal{O}_s$ は $\mathcal{O}$ より真に強い。
空間 $I_s = (I, \mathcal{O}_s)$ は、任意の異なる2点を単元集合という開集合で分離できるためHausdorff空間である。しかし、開被覆として単元集合の族 $\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in I\}$ を考えると、I は無限集合であるため、この $\mathcal{U}$ からどのように有限個の開集合を選んでも I 全体を被覆することはできない。したがって、I_s はコンパクト性を失っている。

例 2 (真に弱い位相を入れてHausdorff性が失われる例).
同じく通常の単位閉区間 $(I, \mathcal{O})$ を考える。
ここで、I に密着位相 (indiscrete topology) $\mathcal{O}_w = \{\varnothing, I\}$ を入れる。明らかに $\mathcal{O}_w \subset \mathcal{O}$ かつ $\mathcal{O}_w \neq \mathcal{O}$ であるため、$\mathcal{O}_w$ は $\mathcal{O}$ より真に弱い。
空間 $I_w = (I, \mathcal{O}_w)$ の開被覆は、事実上 $\{I\}$ しか存在せず、これはそれ自身が有限被覆であるため、I_w はコンパクト空間である。しかし、I_w はHausdorff空間ではない。なぜなら、異なる2点 $0, 1 \in I$ を分離するような空でない開集合は I そのものしか存在せず、互いに交わらない開集合を取ることが不可能だからである。したがって、I_w はHausdorff性を失っている。

5. インフォーマルな注意・解説

証明と具体例から明らかなように、コンパクトHausdorff空間において、

- 位相を真に**強くする**と、Hausdorff性は保たれやすいですが、**コンパクト性が必ず崩壊します。**
- 位相を真に**弱くする**と、コンパクト性は保たれやすいですが、**Hausdorff性が必ず崩壊します。**

この事実から、コンパクトHausdorff空間における位相は、「Hausdorff性を保ったままこれ以上弱くできない極小の位相」であり、同時に「コンパクト性を保ったままこれ以上強くできない極大の位相」であるという、非常に強固で一意的なバランスを保っていることがわかります。

発展的な話題：clopen 集合と 超不連結 (extremally disconnected) 空間

本題の証明では直接使用しませんでしたが、コンパクトHausdorff空間に関連する極めて興味深い概念に、**超不連結 (extremally disconnected)** な空間があります。

通常の位相空間において、開集合であり同時に閉集合でもあるような部分集合を **clopen** 集合（開閉集合）と呼びます。コンパクトHausdorff空間の中でも、**「任意の開集合の閉包 (closure) が、再び clopen 集合になる」**という極端に強い性質を持つ空間のことを、超不連結な空間と呼びます。

例えば、離散位相空間の **Stone Čechコンパクト化** は、超不連結なコンパクトHausdorff空間の代表例として知られています。このような空間は、関数解析やブール代数の表現論において中心的な役割を果たします。コンパクトHausdorff空間の剛性を理解した上で、このような極端な空間の振る舞いを学ぶと、位相空間論の奥深さをさらに味わうことができるでしょう。

引用文献

本記事の定理や補題は、一般位相共空間論における標準的な結果に基づいています。以下の文献にてより深い議論を確認できます。

- Munkres, James R. *Topology* (2nd Edition). Prentice Hall, 2000.
  https://en.wikipedia.org/wiki/Topology_(book)
- Willard, Stephen. *General Topology*. Dover Publications, 2004.
  https://store.doverpublications.com/products/9780486434797
- Gillman, Leonard, and Jerison, Meyer. *Rings of Continuous Functions*. Springer, 1976. (超不連結空間やStone Čechコンパクト化の詳述)
  https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4615-7819-2